

Retângulo áureo e divisão áurea

Geraldo Ávila

1. O retângulo áureo

Chama-se *retângulo áureo* qualquer retângulo $ABCD$ (Figura 1) com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como $ABFE$, o retângulo restante, $CDEF$, será semelhante ao retângulo original.

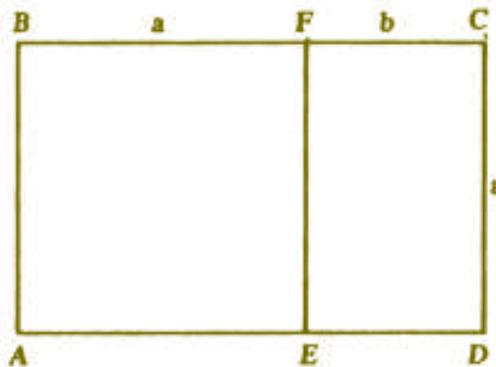


Figura 1

Se $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}. \quad (1)$$

Como veremos logo adiante, esse tipo de retângulo tem muitas propriedades interessantes que justificam o qualificativo “áureo”. Ele tem sido considerado por arquitetos e artistas como o retângulo mais bem proporcionado e de grande valor estético. A Figura 2 reproduz a foto de uma residência suburbana de Paris, projetada pelo famoso arquiteto Le Corbusier, na qual ele utiliza o retângulo áureo. Há aí dois retângulos áureos, um deles representado pelo corpo inteiro da casa e o outro, disposto verticalmente, representado pela parte da casa à esquerda da escada.

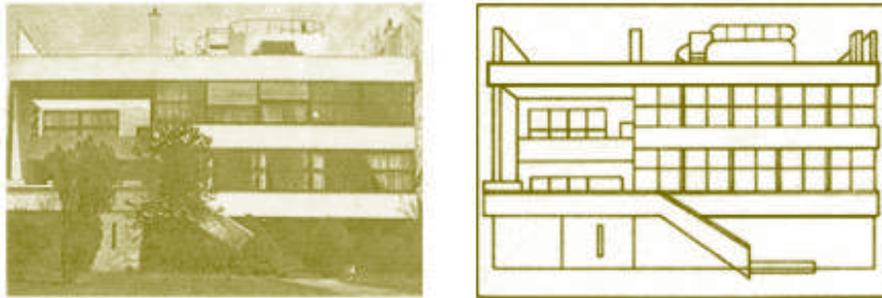


Figura 2

O Partenon (Figura 3), ou templo da deusa Atena, uma das mais admiradas obras da arquitetura universal, revela, em seu frontispício (Figura 4) um quase exato retângulo áureo. Todavia não há evidência histórica de que, ao construir o templo no 5º século a.C., os arquitetos de Péricles tenham conscientemente usado o retângulo áureo.



Figura 3



Figura 4

Voltemos à relação (1). Dela decorre, por uma propriedade bem conhecida das proporções, que:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-b}{(a+b)-a},$$

$$\text{ou seja, } \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}.$$

Isto significa que se o retângulo de lados $a+b$ e a é áureo, então também o é o retângulo de lados a e b .

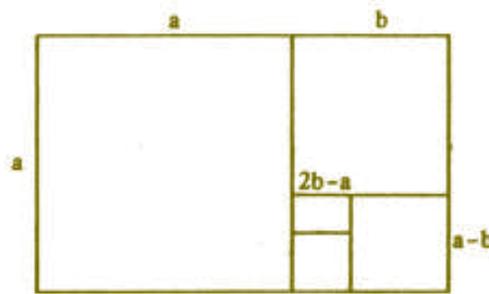


Figura 5

Evidentemente o mesmo raciocínio se aplica para mostrar que também são áureos os retângulos de lados b e $a-b$, $a-b$ e $2b-a$, etc. (Fig. 5). Em outras palavras, dados os números positivos a e b , satisfazendo a relação (1), formemos a seqüência $a+b, a, b, a_2, a_3, \dots$, onde

$$a_2 = a - b, a_3 = b - a_2 = 2b - a, \text{ e, em geral } a_n = a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Trata da seqüência

$$a+b, a, b, a-b, 2b-a, 2a-3b,$$

$$5b-3a, 5a-8b, 13b-8a, \dots (2)$$

Pois bem, o raciocínio anterior estabelece que quaisquer dois elementos consecutivos desta seqüência são os lados de um retângulo áureo. Portanto,

o processo anterior de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.

É fácil provar que os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis. Se fossem comensuráveis, teriam um submúltiplo comum σ , de sorte que, com referencia à Figura 1,

$$AD = (a + b) \sigma \text{ e } AB = a\sigma$$

onde a e b seriam então números inteiros. Em conseqüência, todos os números da seqüência (2) seriam inteiros e positivos. Isto é um absurdo, pois não existe seqüência infinita e decrescente de números inteiros positivos. Concluímos, então, que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.

2. A divisão áurea

O retângulo áureo está intimamente ligado com a chamada *divisão áurea* de um segmento, ou divisão em *média e extrema razão*, que introduziremos a seguir.

Diz-se que um ponto C de um segmento AB (Figura 6) divide este segmento em média e extrema razão se

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} \quad (3)$$



Figura 6

A relação (3) é precisamente a relação (1), se pusermos $AC = a$ e $CB = b$, de sorte que os segmentos AC e CB da divisão áurea (ou $AB = a + b$ e $AC = a$) são os lados de um retângulo áureo.

É interessante notar que se C_1 divide AB em média e extrema razão, e se marcarmos no segmento AB os pontos C_2, C_3, C_4, \dots de tal maneira que $AC_2 = C_1B, AC_3 = C_2C_1, AC_4 = C_3C_2, \dots$, (Figura 7), então C_n divide AC_{n-1} em média e extrema razão $n = 2, 3, 4, \dots$. Este resultado segue facilmente do que já provamos antes sobre a seqüência infinita



Figura 7

de retângulos áureos, donde segue também que os segmentos AC_1 e C_1B da divisão áurea de AB são incomensuráveis. Sugerimos que o leitor faça uma demonstração completa destes resultados.

Como já observamos há pouco, as relações (1) e (3) são idênticas quando pomos $AC = a$ e $CB = b$. Delas segue-se que

$$b^2 = ab = a^2. \quad (4)$$

O número $m = b/a$ é conhecido como a *razão áurea*. Dividindo a equação anterior por a^2 obtemos:

$$m^2 + m = 1. \quad (5)$$

O primeiro membro torna-se um quadrado perfeito quando lhe adicionamos $1/4$:

$$m^2 + m + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{ou seja, } \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada e notando que $m > 0$, teremos:

$$m + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{portanto, } m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0,618 \quad (6)$$

3. Construções geométricas

Vamos construir um retângulo áureo a partir de seu menor lado $AE = a$ (Figura 8). Para isso construímos $EF = AE$ perpendicularmente a AE . Com centro em G , ponto médio do segmento

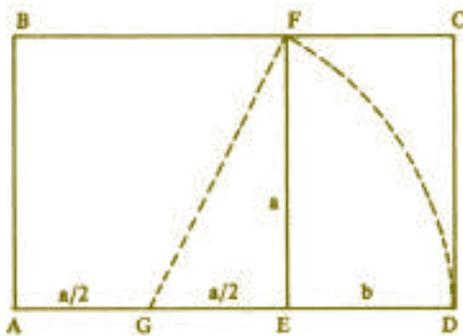


Figura 8

AE , traçamos o arco \widehat{FD} , onde D jaz na reta AE e E é interno ao segmento AD . Como $GF = GD = b + a/2$, o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo GEF nos dá:

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Simplificando, obtemos daqui a relação (4) que, como vimos, equivale à relação (1). Logo $ABCD$ é um retângulo áureo.

Se o problema fosse dividir o segmento $AE = EF$ em média e extrema razão, bastaria completar a construção anterior marcando, no segmento AE , o ponto H tal que $AH = b$ (Figura 9).



Figura 9

Observações finais

A divisão áurea é conhecida desde os pitagóricos de cinco séculos a.C. Ao que tudo indica, essa divisão foi descoberta no pentágono regular, que

exibe uma surpreendente profusão de segmentos na razão áurea. Talvez este tenha sido o motivo que levou os pitagóricos a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita (Figura 10).



Figura 10

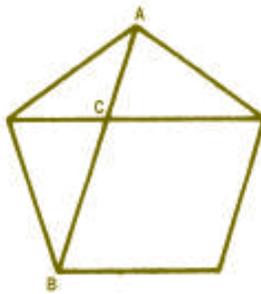


Figura 11

Como exemplo de ocorrência da divisão áurea num pentágono regular convexo mencionamos que a interseção de duas de suas diagonais divide qualquer delas em média e extrema razão. Assim, na Fig, 11,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar esse resultado.

É muito improvável que Pitágoras ou seus primeiros discípulos soubessem que os segmentos da divisão áurea fossem incomensuráveis, embora haja fundadas razões para se acreditar que a descoberta dos incomensuráveis tenha ocorrido com o pentágono regular no fim do 5º século a.C. Certamente, Pitágoras e seus discípulos sabiam como construir geometricamente a solução (6) da equação (5). As construções correspondentes às Figuras 8 e 9 acima se encontram nos *Elementos* de Euclides, de cerca de 300 anos A.C.

Na antiguidade, a divisão de um segmento em média e extrema razão tornou-se tão familiar que era conhecida simplesmente como “seção”, em qualquer qualificativo. O nome “divisão áurea” lhe foi dado por Kepler (1571-1630), que escreveu:

A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa.